

第3回 大阪医科薬科大学実践演習

1

点 A, B を $A(-1, 5)$, $B(2, -1)$ とする。実数 a, b について直線 $y = (b - a)x - (3b + a)$ が線分 AB と共有点をもつとする。点 $P(a, b)$ の存在する領域を図示せよ。

2

$\triangle ABC$ の 3 つの角 $\angle A, \angle B, \angle C$ のそれぞれの大きさを A, B, C とする。

- (1) $\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ を余弦の加法定理から導け。
- (2) (1) の結果を用いて $\cos A + \cos B \leq 2\sin \frac{C}{2}$ を示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。
- (3) (2) の結果を用いて $\cos A + \cos B + \cos C$ が最大となるとき、 A, B, C を求めよ。

3

関数 $f(x) = -x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \pi$ の範囲で、方程式 $f''(x) = 0$ がただ 1 つの解 $x = a$ をもつことを示せ。
- (2) (1) で存在が示された a に対して、 $a < x < \pi$ の範囲で、方程式 $f'(x) = -1$ がただ 1 つの解 $x = b$ をもつことを示し、その値 b を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(b, f(b))$ における法線 m の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた法線 m と曲線 $y = f(x)$ および y 軸とで囲まれた図形を、 x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

4

数列 $\{a_n\}$ は、すべての正の整数 n に対して $0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$ を満たしているとする。このとき、すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ。

5

四面体 OABC は、線分 OA, OB, OC が互いに垂直に交わり、 $\triangle ABC$ の面積は $3\sqrt{3}$ で $\angle ABC = 60^\circ$ を満たすとする。

- (1) 線分 OB の長さを求めよ。
- (2) 四面体 OABC の体積の最大値を求めよ。