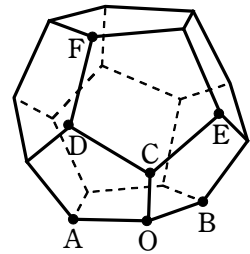


1 1辺の長さが1の正十二面体を考える。点 O, A, B, C, D, E, F を図に示す正十二面体の頂点とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。なお、正十二面体では、すべての面は合同な正五角形であり、各頂点は3つの正五角形に共有されている。



- (1) 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めて、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) O から平面 ABD に垂線 OH を下ろす。 \overrightarrow{OH} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。さらにその大きさを求めよ。

2 a, b は $a \geq b > 0$ を満たす整数とし、 x と y の2次方程式

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

- (1) $a = b$ とするとき、条件を満たす整数 a の値をすべて求めよ。
- (2) $a > b$ とするとき、条件を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

3 $0 < t < 3$ のとき、連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq t - y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と、そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

4 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $A_1(a_1, a_1^2), A_2(a_2, a_2^2), A_3(a_3, a_3^2), \dots$ を、 A_{k+2}

($k \geq 1$) における C の接線が直線 $A_k A_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし、 $a_1 < a_2$ とする。三角形 $A_k A_{k+1} A_{k+2}$ の面積を T_k とし、直線 $A_1 A_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k$ を S を用いて表せ。

5 点 $P(x, y)$ が双曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上を動くとき、点 $P(x, y)$ と点 $A(a, 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1) $f(a)$ を a で表せ。

(2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき、 ab 平面上に曲線 $b = f(a)$ の概形をかけ。